$SL_2(\mathbb{R})$ : On rappelle les choses qu'on a faites directement sur des exemples

~~Ex~~ $G = SL_2(\mathbb{R})$ $K = SO(2)$ ~~est~~ le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$ ~~(S)~~ ~~Ex~~ où

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

et $B = \begin{pmatrix} a & u \\ & a^{-1} \end{pmatrix}$ = stabilisateur du point $i\infty \in \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{i\infty\}$.
($\Rightarrow$ le stab. de $P/_{\Gamma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} i\infty$ est $\alpha_{pr} \cdot B \, \alpha_{pr}^{-1}$).

~~où $\mathcal{H} \simeq B = \{(a \ a^{-1})\} \cdot \{\pm 1\} \cdot \{(1\ u;\ 1)\}$ ⇝ $\mathcal{H} = A_P \times U_P$, $A_P$, $M_P$, $U_P$~~

~~et l'isom. est juste donné par $((a\ a^{-1}), (1\ u;\ 1)) \mapsto$~~

la seule ~~c~~ classe de conj. de paraboliques propres.

$$B = U_P \cdot A_P \cdot N_P = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}\right\} \cdot \left\{\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}\right\} \cdot \{\pm Id\}$$

⇝ $U_P \times A_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ (obs. $\pm Id$ agissent trivialement)

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot i = \begin{pmatrix} a & ua^{-1} \\ & a^{-1} \end{pmatrix} i = a^2 i + u.$$

⇝ $e_B = U_B \simeq \mathbb{R}$ $\simeq \underset{\sim}{A_B} \times U_B$ $\underset{\sim}{\{0\}} \times U_B$

$X(B) = \overline{A}_B \times U_B \simeq \mathcal{H} \cup \underset{\sim}{\mathbb{R}_\infty}$

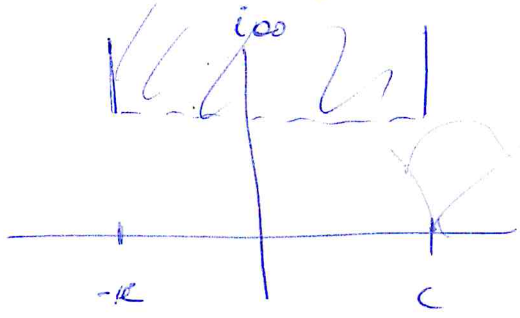
~~une~~ droite collée à la pointe $\infty$

⇝ $\overline{X} = \mathcal{H} \cup \bigcup_{\text{cusps}} \mathbb{R}$

⇝ $\overline{X}/_{\Gamma} = \mathcal{H} \cup \bigcup_{\text{cusps}/_{\Gamma}} S^1$. où $S^1 \simeq U_P/_{\Gamma_P}$.

Rappelons que $A_{Q,t} = \{a \in A_P : \alpha(a) \le t \quad \forall \alpha \in \Delta - I(P)\}$

D'où l'ensemble de Siegel est juste autour $\infty$




$\overline{A}_{Q,t} \times C \quad = \quad$ idem $\quad \cup \ (\{\infty\} \times C)$

$\{Sp_4$ :

$$G = Sp_4(\mathbb{R}) = \{g \in GL_4(\mathbb{R}) : {}^tg\, J\, g = J\} \qquad J = \begin{pmatrix} &&&1\\ &&1&\\ &-1&&\\ -1&&& \end{pmatrix}$$

$$K = G \cap O(4) = \left\{\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix} \in Sp_4(\mathbb{R}) : A\,{}^tA + B\,{}^tB = {}^tAA + {}^tBB = Id\right\} \simeq U(2)$$

$$\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix} \longmapsto A + iB$$

Ex : $G \curvearrowright \mathcal{H}_2 = \{X+iY \mid X, Y \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : {}^tX = X,\ {}^tY = Y,\ Y > 0\}$ $\left(\simeq Sp_4(\mathbb{R})/U(2)\right)$

via $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}(X+iY) = \big(A(X+iY)+B\big)\cdot\big(C(X+iY)+D\big)^{-1}$

$\cancel{C(X+iY)+D}$

et le stab. de $i \in \mathcal{H}_2$ est justement $K$.

On peut considérer $\overline{\mathcal{H}}_2 = \{Z = X+iY : {}^tX = X,\ {}^tY = Y,\ Y \geq 0\}$ qui est stratifié par $\langle \{Z : \mathrm{rk}(Y) \geq d\},\ 0 \le d \le 2\rangle$ et on peut essayer de jouer le même jeu...

* Il n'y a que deux classes de conj. de paraboliques rationnels :

$$P_0 = B = \left\{\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & u_1 & v & s\\ & a_2 & u_2 & v\\ \hline & & a_2^{-1} & -u_1\\ & & & a_1^{-1}\end{array}\right)\right\} \rightsquigarrow A_0 = \left\{\begin{pmatrix} a_1 &&&\\ & a_2 &&\\ && a_i^{-1} &\\ &&& a_i^{-1}\end{pmatrix}\right\} \qquad M_B = \left\{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 &&&\\ & \varepsilon_2 &&\\ && \varepsilon_2 &\\ &&& \varepsilon_1\end{pmatrix} : \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\right\}$$

$$U_B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & v & s\\ & 1 & u_2 & v\\ && 1 & -u_1\\ &&& 1\end{pmatrix}\right\}.$$

$\cancel{P_1 =}$ $\quad P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & 0 \\ & * & * & 0 \\ & & & * \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}$

$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & x_1 & u_2 & \\ & x_2 & x_3 & \\ & & & \varepsilon \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 & u_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),\ \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$

$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v & s \\ & 1 & & v \\ & & 1 & -u_1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le parabolique de Klingen

$P_2 = \left\{ \left( \; \right) \right\} \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} : A \in SL_2^{\pm}(\mathbb{R}) \right\}$

$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & v & s \\ & 1 & u_2 & v \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le parab. de Siegel.

* <u>Le bord de la compactif de Borel-Serre</u> –

$\Gamma = \Gamma(m),\ m \geq 3$ ~~sous-groupe~~ arithmétique de $Sp_4(\mathbb{Q})$ sans torsion. / de congruence

$\rightsquigarrow\ {}_{\Gamma}\backslash X = K(\Gamma, 1)$ - espace non-compact de dim réelle 6

$\rightsquigarrow$ si $P = P_1$ ou $P_2$ est un compact maximal, alors

$$e'_P = e_P/_{\Gamma_P} = \left(U_P/_{\Gamma_{U_P}}\right) \times \left(X_P/_{\Gamma_P}\right) \longrightarrow \left(X_P/_{\Gamma_P}\right) \cong (K \cap P)\backslash M_P/(\Gamma \cap P) \underset{\cong}{\sim} \Gamma_i \backslash SL_2(\mathbb{R})/SO(2) \cong \Gamma_i \backslash \mathcal{H}$$

est une variété de dim 5 fibrée sur une variété (non-comp) de dim 2 dont les fibres sont compactes. (de dim 3).

$\rightsquigarrow$ Si $P = B$ est le bord, $e'_B = \Gamma_{U_B}\backslash e_B = (\Gamma \cap U_B)\backslash U_B$ est une variété ~~de dim 4~~ compacte de dim 4 fibrée sur $S^1$ de deux façons différentes :

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & v & s \\ & 1 & u_2 & v \\ & & 1 & -u_1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ p_1\ } \begin{pmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -u_1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ p_2\ } \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto e'_B \xrightarrow{f_i} \Gamma_{U_i}\backslash U_i$

Déf. ${}_f P_i = (\Gamma \cap P_i)\backslash(Sp_4(\mathbb{Z}) \cap P_i)$

${}_f G = \Gamma\backslash Sp_4(\mathbb{Z})$

$Y_i = {}_f G \times_{{}_f P_i} e'_{P_i}$ (en gros toutes les translatés de la ~~com~~ cellule $e'_{P_i}$)

$\overline{Y_i} = {}_f G \times_{{}_f P_i} \overline{e'_{P_i}}$. (A)

$\leadsto$ $\boxed{\text{PROP}}$ $\partial(\Gamma\backslash\overline{X}) \simeq \overline{Y_1} \cup_{Y_0} \overline{Y_2}$.

~~Et~~ $\leadsto$ on a $\beta_i : {}_f P_i \times_{{}_f P_0} e'_{P_0} \xrightarrow{\sim} \partial(\overline{e'_{P_i}})$.

(en gros on a vu que $\overline{e'_{P_i}}$ se compose des $e'_{P_0}$ ~~[illegible]~~, ${}_f P_i$ agit transitivement sur ces composantes et le stab de $e'_{P_0}$ est ${}_f P_0$).

d'où $\alpha_i : Y_0 \xrightarrow{\sim} \partial(\overline{Y_i}) = {}_f G \times_{{}_f P_i} \partial(\overline{e'_{P_i}})$.

et donc on recolle $\overline{Y_1}$ et $\overline{Y_2}$ le long leur bord commun.

$\boxed{\text{REM}}$ Travailler avec $\Gamma(m)$ permet de réduire mod $m$ sur l'espace $m = p$

$P_i(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} P_i(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ de drapeaux isotropiques. En particulier, on voit que dans $\partial X$ il y a $r_i$ copies de $\overline{Y_i}$, où

$r_1 = \#\{$~~droites dans $\mathbb{F}_p^4$~~ $\ell \subseteq h$ : $\ell$ = droite isot. dans $\mathbb{F}_p^4 \simeq V_p$, $h$ = plan isot$\}$

$r_2 = \#\{$~~h~~ plan $\sim\}$

$r_0 = \#\{\ell \subseteq h \sim\}$

et deux comp. s'intersectent le long une copie $\overline{Y_0}$ ssi ~~leurs droites correspondent~~ $\ell \subseteq h$.

## DÉCOMPOSITION DE LA MÉTRIQUE SUR X -

Rapp. que, si $G, K$, $X = K\backslash G$, $B(-,-)$ = forme de Killing sur $\mathfrak{g}$, $\theta$ = inv. de Cartan ⇝ $b_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y))$ est sym. positive non-dég. invariante par $Ad(K)$.

et définit une métrique sur $\mathfrak{g}$, qu'on étend par $G$-invariance à $X$.

⇝ on note $dx^2$ cette métrique.

Si $\sigma : G \to X$ dénote la proj. alors $d\sigma$ identifie $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}$ avec $T_o(X)$, $o = K \in X$ l'origine.

(DEF) Rappelons que $\mu_o : Y := A_P \times X_P \times U_P \xrightarrow{\sim} X$ est $(A_P \times P)$-équivariant, où si $p = amv$, $a \in A_P$, $m \in M_P$, $v \in U_P$

$$(b, z, u) \cdot p = (ba, zm, (am)^{-1} u\, am\, v).$$

où $A_P$ agit via l'action géodésique.

⇝ $dy^2 = \mu_o^*(dx^2)$ $da^2$ et $du^2$ métriques invariantes sur $A_P$ et $U_P$ définies par la restriction de $b_\theta$ sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{u}_P$.

* On décrit $da^2$ et $du^2$ :

comme $\exp : \mathfrak{a}_P \xrightarrow{\sim} A_P$ est un isom. de groupes de Lie, alors si tout sous-ensemble $Q$ des caractères rationnels du tore max. déployé $S_P$ $(A_P = S_P(\mathbb{R})^\circ)$ forment une base de $X(S_P) \otimes \mathbb{Q}$ alors

$$da^2 = \sum_{\alpha,\beta \in Q} c_{\alpha\beta}\, d\log(\alpha)\, d\log(\beta) \quad \text{où } c_{\alpha\beta} \text{ constantes } t_Q$$

$$b_\theta(-,-) = \sum_{\alpha,\beta \in Q} c_{\alpha\beta}\, d\alpha\, d\beta$$

En particulier, prenons $Q = \Delta - I(P)$.

* Écrivons $\mathfrak{u}_P$ $\mathfrak{u}_P = \bigoplus_{\beta\in\Phi_P} \mathfrak{u}_\beta$ $\qquad \mathfrak{u}_\beta = \{X\in\mathfrak{g} : Ad(a)X = \beta(a)X \ \forall a\in A_P\}$

et soit $h_\beta$ la métrique invariante sur $U_P$ qui vaut zero sur $\mathfrak{u}_\alpha$, $\alpha\neq\beta$, t sur $\mathfrak{u}_\beta$ est la restriction de $B_\theta(-,-)$

$\leadsto$ les $\mathfrak{u}_\beta$ sont orthogonaux

PROP| $y=(a,z,u)\in Y_P$. Alors $\mathfrak{a}$, $T_z(X_P)$, et les $\mathfrak{u}_\beta$ : $\beta\in\Phi_P$, sont orthogonaux et

$$(dy^2)_y = (da^2)_a \oplus (dz^2)_z \oplus \bigoplus_{\beta\in\Phi_P} \frac{\beta(a)^2}{2}\underbrace{h_\beta(z)}_{:=(Int\, m)^* h_\beta}$$

qui ne dép. que de l'image $z$ de $m$ dans $X_P$.

et si $dv_Y, dv_{A_P}, dv_{X_P}$ et $dv_{U_P}$ dénotent les formes de volume correspondantes, alors

$$2^e dv_Y = 2\rho_P(a)\, dv_{A_P}\wedge dv_{X_P}\wedge dv_{U_P} \qquad dv_{A_P} = c\cdot \bigwedge_{\alpha\in\Delta-I}\frac{d\alpha}{\alpha}$$

où $e = \dfrac{\dim U_P}{2}$ $\qquad 2\rho_P = \sum_{\beta\in\Phi_P}\beta\cdot\dim\mathfrak{u}_\beta$, $\quad c = \det(c_{\alpha\beta})^{1/2}$.

* <u>Formes différentielles sur les ensembles de Siegel</u> –

Soit $(\omega^i)_{1\leq i\leq m}$ un 'moving frame' ($m=\dim X$) sur $X$ tq

$$\begin{cases} \omega^i & 1\leq i\leq s & \text{est un relèvement de } d\log\alpha_i \ (\alpha_i\in\Delta-I=\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}) \\ \omega^i & s<i\leq t & \text{est un rel. d'un 'moving frame' orthog de } X_P \\ \omega^i & t<i\leq m & \text{est un rel. de 1-formes invariantes sur } U_P \text{ provenant d'une base des } \mathfrak{u}_\beta^*,\ \beta\in\Phi_P. \end{cases}$$

Si $\tau$ = $q$-forme sur (un ouvert de) $Y$

$$\leadsto \tau = \sum_{\substack{J\subseteq I_m\\ |J|=q}} f_J\,\omega^J \qquad , \quad \left(\omega^J = \bigwedge_{i\in J}\omega^i\right)$$

notons $\alpha(J) = \sum_{i\in J}\alpha(i)$ $\qquad \alpha(i) = \begin{cases} 0 & i\leq t \\ \beta & \omega^i_e\in\mathfrak{u}_\beta^* \end{cases}$ $\qquad$ (if $\alpha$ is a root of $A$ we write for $a\in A$ $\alpha(a)$ or $a^\alpha$)

si $a\in A_P$ on note $a^{\alpha(J)} = \prod_{i\in J}\alpha(i)(a)$

Rappelons qu'un ensemble de Siegel est un ensemble de la forme

$S_{t,C} = \mu_0(A_{P,t} \times C) \subseteq X$ , $t>0$ $A_{P,t} = \{ a \in A_P ; \alpha(a) \leq t \ \forall \alpha \in \Delta - I \}$

$C \subseteq X_P \times U_P$ rel. comp.

Si $\lambda \in X(A_P)$ on écrit $\lambda = \sum_i c_i \alpha_i$ et on dit que $\lambda > 0$ (resp. $\geq 0$) si $c_i > 0$ (resp $\geq 0$) $\forall i$.

LEMME | Soit $f$ fonction positive mesurable sur $S_{t,C}$, et $\lambda \in X(A)$ tq.

a) $f(a,x) \leq C \cdot \lambda(a)$ $\forall$ $a \in A_{P,t}$ $x \in C$

b) $2\rho_P + \lambda > 0$

Alors $f \in L^1(S_{t,C}, dv_X)$. En fait $S_{t,C}$ est de volume fini

PREUVE | Il suffit de montrer que $\lambda(a) \in L^1(A_{P,t} \times C, dv_Y)$

Si nous $2\rho_P + \lambda = \sum_{1 \leq i \leq s} m_i \alpha_i$ $m_i > 0$, alors par la PROP 1 $\exists$ $C' > 0$ const. tq.

$$\int_{A_{P,t} \times C} \lambda(a) \, dv_Y = C' \cdot \prod_{i \leq s} \int_0^t \alpha_i^{m_i - 1} d\alpha_i < +\infty \quad \text{car } m_i - 1 > 0$$ ■

PROP | Soit $\sigma$ = $q$-forme continue sur $S_{t,C}$, $\tau = \mu_0^*(\sigma) = \sum_{\substack{J \subseteq I_m \\ |J| = q}} f_J \omega^J$

Supp. que : $\exists$ $\lambda \in X(A_P)$ tq

a) $\rho_P + \lambda - \nu > 0$ $\forall$ poids $\nu$ de $A$ apparaîssant dans $\bigotimes_{i \leq q} \Lambda^i n_P$

b) $|f_J| < \lambda(a)$ sur $\mu_0^{-1}(S_{t,C})$ $\forall J$

Alors $\sigma \in L^2(S_{t,C}, dv_X)$.

PREUVE | Il faut montrer que

$$\int_{S_{t,C}} \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle \, dv_X < +\infty \quad \text{ou equiv} \quad \int_{A_{P,t} \times C} \langle \tau_Y, \tau_Y \rangle \, dv_Y < +\infty.$$

rapp. que $\langle -,- \rangle$ = prod. scalaire sur $\Lambda^q T^*(Y)$ induit par $dy^2$ ~~Riccadeldele~~ $X_e$

écrivons :

$$dy^2 = \sum_{1 \le i,j \le m} g_{ij} \, \omega^i \omega^j .$$

~~donc~~ on écrit explicitement le prod. scalaire des $q$-formes :

soit $(g^{ij})$ = inverse de $(g_{ij})$ et pour $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ $J' = \{j'_1, \dots, j'_q\}$

suites croissantes. on ~~écrit~~ note

$$g^{J,J'} = \det (g^{j_i j'_k})$$

$$f^J := \sum_{J'} g^{J,J'} f_{J'} .$$

on a alors : $\langle \tau_Y, \tau_Y \rangle = \sum_{J,J'} g^{J,J'} f_J \cdot f_{J'} = \sum_J f^J \cdot f_J .$

et il suffit de montrer que $f^J f_J$ est integrable sur $A_{P,t} \times C$ $\forall J$.

* On décompose $I_m = I_{-1} \sqcup I_0 \sqcup \bigcup_p I_p$ $I_{-1} = \{1, \dots, s\}$ $I_0 = \{s+1, \dots, t\}$

$I_p = \{ i \in I_m \mid \omega^i_e \in u^*_p \}$, alors la prop. décrivant $\langle \overset{dy^2}{\text{~~--~~}} \rangle$ donne :

$$g^{ij} = \begin{cases} c^{ij} & \text{si } i,j \in I_{-1} \qquad \left( da^2 = \sum c_{\alpha\beta} \frac{d\alpha}{\alpha} \frac{d\beta}{\beta} \right) \\ \delta_{ij} & \text{si } i,j \in I_0 \quad (\text{car } \omega^i \text{ relève un frame orthog. sur } X_P) \\ 2\,\beta(a)^{-2} h^{ij}_p(z) & i,j \in I_p \qquad (\text{~~matrice diagonale~~}) \\ 0 & \text{si autrement} \qquad (\text{orthogonalité}) \end{cases}$$

ou ~~$k$~~ on écrit $k_{\beta,z} = \sum_{i,j \in I_\beta} h_{\beta,ij}(z)\, \omega^i \omega^j$

np $g^{J,J'} = 0$ sauf si $|J \cap I_*| = |J' \cap I_*|$ $* \in \{-1, 0, \beta : \beta \in \Phi_P\}$.

Et dans ce cas :

$$\alpha(J) = \alpha(J') \quad \text{et} \quad |g^{J,J'}(y)| \prec a^{-2\alpha(J)} \left( := \prod_{\beta \in \alpha(J)} \beta(a)^{-2} \right)$$

$$\left( y \in A_{P,t} \times C \times U_P \quad , \quad a = pr_{A_{P,t}}(y) \right).$$

$$\Rightarrow |f^J| \leq \sum_{J'} |g^{J,J'}| \cdot |f_{J'}| \prec a^{-2\alpha(J)} \cdot a^{\lambda} \quad \text{par hyp. b)}$$

$$\Rightarrow |f^J \cdot f_{J'}| \prec a^{-2\alpha(J) + 2\lambda} \quad \text{sur} \quad A_{P,t} \times C \times U_P.$$

est intégrable si $2\rho_P + 2\lambda - 2\alpha(J) > 0$.

Or, $\alpha(J)$ = somme d'au plus $q$ éléments dans $\Phi_P$ et chacun apparaît au plus $|I_P| = \dim \mathfrak{u}_P$ fois np on conclut par a) ▪

PROP | Soit $\sigma = \sum_J f_J\, \omega^J$ une $q$-forme sur $Y$ et $b \in A_P$. Alors

$$(\sigma \cdot b)_y = \sum_J f_J(yb)\; b^{-\alpha(J)}\; \omega^J \qquad (y \in Y)$$

Si $\sigma b = \sigma$ alors $f_J((a,q) \cdot b) = b^{\alpha(J)} f_J((a,q))$ $(y = (a,q),$ $a \in A_P$, $q \in X_P \times U_P)$, et en part :

$$f_J((a,z,u)) = a^{\alpha(J)} f_J((1, z, aua^{-1}))$$

et $|f_J| \prec a^{\alpha(J)}$ sur un ens. de Siegel $\mathfrak{S}_{t,C}$, et $\sigma \in L^2(\mathfrak{S}_{t,C}, dv_X)$.

PREUVE | Conséquence facile de la prop. dernière ▪